فهرست مطالب

صفحه عنوان

فصل ۱

تنش و کرنش

۱.۱ تنش قائم

نیرو بر واحد سطح، تنش نامیده می‌شود و با حرف یونانی σ خوانده می‌شود. بنابراین تنش در عضوی که دارای سطح مقطع A است و تحت اثر نیروی محوری P قرار دارد از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (۱\_۱)$$

قابل ذکر است که σ بیانگر متوسط تنش در سطح مقطع است نه تنش در نقطه‌ای خاص از آن. علامت تنش کششی را مثبت و علامت تنش فشاری را منفی درنظر می‌گیرند. یکی از واحدهای مهم برای تنش $\frac{N}{m^۲}$ است که پاسکال (Pa) نام دارد. از دیگر واحدهای تنش می‌توان به psi (پوند بر اینچ مربع) یا ksi (کیلوپوند بر اینچ مربع) اشاره کرد.

با توجه به اینکه سطح مقطع عضو تحت اثر نیروی محوری بسته به فشاری یا کششی بودن آن، افزایش و یا کاهش می‌یابد تنش را با استفاده از سطح مقطع اولیه و یا سطح مقطع واقعی می‌توان بدست آورد. در حالت اول تنش محاسبه شده، تنش مهندسی نام دارد و در حالت دوم تنش واقعی محاسبه می‌شود.

۲.۱ تنش برشی

چنانچه نیروی P عمود بر محور طولی عضو (به موازات سطح مقطع A) بر عضو وارد شود تنش برشی در عضو بوجود می‌آید. با تقسیم برش P بر مساحت A، تنش برشی میانگین در مقطع بدست می‌آید که آنرا با حرف یونانی τ نشان می‌دهیم:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} \qquad (۲\_۱)$$

فصل ۲

پیچش

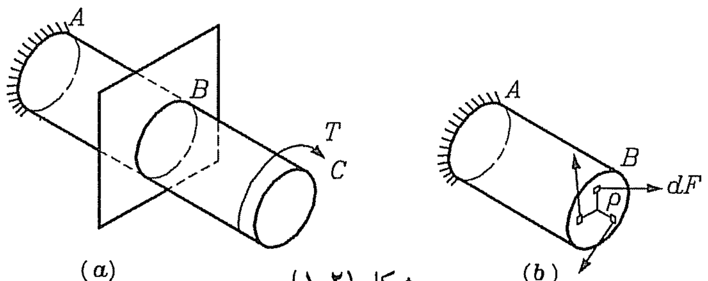
۱.۲ تنش در محورها

اعضای تحت پیچش دارای استفاده‌های زیادی درکارهای مهندسی هستند که از مهمترین آنها کاربرد در محورهای انتقال است که توان را از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر انتقال می‌دهند. برای اعضای تحت پیچش، مقاطع دایروی توپر یا توخالی استفاده می‌شود و علت آن این است که این مقاطع در پیچش بصورت مسطح و قائم بر محور باقی می‌مانند و اعوجاج پیدا نمی‌کنند. با استفاده از این خاصیت است که نتیجه می‌شود توزیع کرنش برشی (و در نتیجه تنش برشی) بصورت خطی و متناسب با فاصله از محور می‌باشد. از دیگر فرضیات پیچش این است که مصالح همگن است، میله مستقیم باقی می‌ماند و شعاعهای اولیه نیز بصورت شعاع باقی می‌مانند، همچنین طول و قطر میله تغییر نمی‌کند.

در شکل زیر میله‌ای راکه تحت اثر پیچش T است درنظر می‌گیریم و از نقطه دلخواه B مقطعی عمود بر محور این میله می‌زنیم. در مقطع B بایستی برآیند لنگر نیروهای dF برابر T باشد. پس داریم:

$$\int \rho dF = T \quad \text{و} \quad dF = \tau dA \quad \text{و} \quad dA = ۲\pi\rho d\rho \rightarrow$$

$$\int_{۰}^{c} \rho\tau \times ۲\pi\rho d\rho = ۲\pi \int_{۰}^{c} \rho^{۲}\tau d\rho = T \qquad (۱\_۲)$$



شکل (۲_۱)

فصل ۳

خمش الاستیک

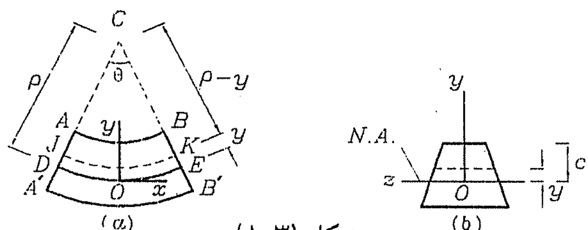
در مبحث خمش دو تئوری وجود دارد: تئوری تیر برنولی و تئوری تیر تیموشنکو. در تئوری تیر تیموشنکو برخلاف تئوری تیر برنولی اثر تغییرشکلهای برشی در خمش دیده می‌شود که به‌خاطر این تغییر شکلهای برشی در تئوری تیر تیموشنکو صفحه پس از خمش عمود بر راستای طولی میله باقی نمی‌ماند. در کتب مقاومت مصالح دانشگاهی تئوری تیر برنولی که ساده‌تر است تشریح شده و خلاصه درس این فصل هم قاعدتاً براساس تئوری تیر برنولی می‌باشد.

۱.۳ عضوهای منشوری در خمش محض

مطابق شکل زیر عضوی که در معرض لنگرهای مساوی و مخالف وارد بر یک صفحه طولی قرار داشته باشد عضو تحت خمش محض نام دارد. این عضو بصورت کمانی از دایره با شعاع انحنای ρ خم می‌شود. در خمش محض سطحی موازی با وجه‌های بالا و پایین عضو وجود دارد که در آن ε_x و σ_x صفر است. این سطح، سطح خنثی نام دارد (سطح DOE). در شکل زیر در نقاطی که به فاصلهٔ y از محور خنثی قرار دارند کرنش برابر است با:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \qquad (۱\_۳)$$

$$\varepsilon_{max} = -\frac{c}{\rho} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{y}{c}\varepsilon_{max} \qquad (۲\_۳)$$



شکل (۳_۱)

فصل ۴

خمش پلاستیک

۱.۴ مقدمه

درحالت خمش پلاستیک فرض اساسی هندسی خمش باز برقرار می‌باشد و مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور تیر پس از خمش بصورت صفحه مسطح باقی می‌مانند، بنابراین در این حالت نیز کرنش یک تار متناسب با فاصله آن تار از محور خنثی می‌باشد. در خمش الاستیک از رابطهٔ $\varepsilon = -\dfrac{y}{\rho}$ برای محاسبه کرنش در المانی که به فاصله y از محور خنثی قرارگرفته استفاده می‌شود و می‌توان از ضرب کردن مدول یانگ در کرنش ε، مقدار تنش σ را محاسبه کرد ولی در خمش پلاستیک تنها رابطه $\varepsilon = -\dfrac{y}{\rho}$ صادق می‌باشد و قانون هوک $(\sigma = E\varepsilon)$ برقرار نیست و علت آن این است که بر خلاف کرنش، تنش نمی‌تواند از تنش تسلیم که آنرا σ_y می‌نامیم تجاوزکند. برای بدست آوردن تنش در تاری از مقطع می‌توان کرنش آنرا با کرنش تسلیم $\left(\varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E}\right)$ مقایسه کرد. اگر کرنش کمتر ازکرنش تسلیم بود می‌توان از رابطهٔ هوک با ضرب کردن مدول یانگ درکرنش تار، تنش آنرا محاسبه کرد و اگر کرنش بزرگتر ازکرنش تسلیم بود تنش آن تار برابر مقدار ثابت σ_y است. در خمش پلاستیک، محور خنثای تیر الزاماً از مرکز هندسی سطح مقطع تیر عبور نمی‌کند و تنها در صورتی که مقطع تیر نسبت به محور خمش دارای تقارن باشد و همچنین نمودار تنش ـ کرنش درکشش و فشار یکسان باشد محور خنثی از مرکز هندسی سطح مقطع می‌گذرد. در حالت کلی در خمش پلاستیک برای تعیین موقعیت محور خنثی از دو نکته زیر استفاده می‌شود:

۱) نمودار توزیع کرنش بصورت خطی است.

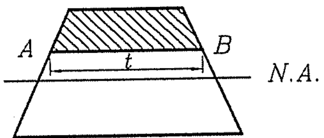
۲) تعادل مقطع ایجاب می‌کند که برآیند نیروهای کششی و فشاری وارده بر مقطع با هم برابر باشند.

فصل ۵

بارگذاری عرضی

۱.۵ تنش برشی در تیر

در شکل زیر تنش برشی متوسط بر روی خط AB برابر است با:



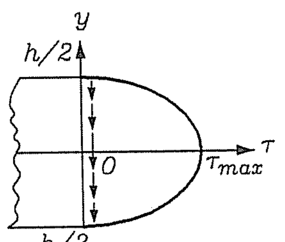
شکل (۵ـ۱)

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} \qquad (۵\text{ـ}۱)$$

در رابطه فوق V برش قائم مقطع، Q لنگر استاتیک سطح هاشور خورده، I ممان اینرسی مقطع حول محور خنثی و t پهنای مقطع در محل محاسبهٔ تنش برشی می‌باشد. حاصلضرب تنش برشی در ضخامت را جریان برش می‌نامند و بنابراین داریم:

$$q = \frac{VQ}{I} \qquad (۵\text{ـ}۲)$$

اگر با استفاده از رابطه ۵ـ۱ توزیع تنش برشی را در یک مقطع مستطیلی تحت اثر برش قائم V بدست آوریم می‌بینیم که این توزیع در ارتفاع تیر مستطیلی سهمی شکل است و تنش برشی در محل محور خنثی ماکزیمم است و مقدار آن ۱/۵ برابر تنش برشی متوسط است $\left(\tau_{max} = \frac{۳V}{۲A}\right)$.



شکل (۵ـ۲)

فصل ۶

معیارهای تسلیم و شکست

۱.۶ معیارهای تسلیم مواد شکل‌پذیر

در مواد شکل پذیر از دو معیار متداول برای بررسی تسلیم استفاده می‌شود:

۱) **معیار تنش برشی ماکزیمم:** براساس این معیار تا هنگامی که مقدار ماکزیمم تنش برشی (τ_{max}) در قطعه‌ای از $\frac{۱}{۲}\sigma_Y$ کوچکتر باشد قطعه سالم می‌ماند. در حالت تنش صفحه‌ای، مقدار ماکزیمم تنش برشی (τ_{max}) برابر $\frac{۱}{۲}|\sigma_{max}|$ است به‌شرط آنکه تنشهای اصلی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند و اگر تنش ماکزیمم مثبت و تنش مینیمم منفی باشد، این مقدار برابر $\frac{۱}{۲}|\sigma_{max} - \sigma_{min}|$ است. پس اگر تنشهای اصلی σ_a و σ_b هم علامت باشند از معیار تنش برشی ماکزیمم نتیجه می‌شود:

$$|\sigma_a| < \sigma_Y \quad \text{و} \quad |\sigma_b| < \sigma_Y \tag{۶_۱}$$

اگر تنشهای اصلی σ_a و σ_b علامتهای مختلف داشته باشند، از معیار تنش برشی ماکزیمم نتیجه می‌شود:

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_Y \tag{۶_۲}$$

در شکل ۶_۱ رابطه‌های فوق بصورت ترسیمی نشان داده شده است. در این شکل هر حالت تنش مفروض با نقطه‌ای به مختصات σ_a و σ_b نشان داده می‌شود که σ_a و σ_b دو تنش اصلی‌اند. اگر این نقطه در ناحیهٔ نشان داده شده در شکل واقع شود، قطعهٔ سازه‌ای سالم می‌ماند. اگر نقطهٔ مورد بحث بیرون از این ناحیه واقع شود، قطعه در نتیجهٔ تسلیم ماده خراب می‌شود. شش ضلعی مربوط به آغاز تسلیم در ماده را شش ضلعی ترسکا می‌نامند.

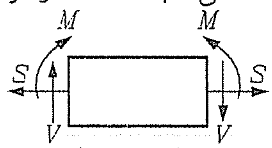
فصل ۷

برش و لنگر خمشی

با استفاده از معادلات تعادل زیر می‌توان تیرهای معین را تحلیل کرد:

$$\sum F_x = \circ \quad \text{و} \quad \sum F_y = \circ \quad \text{و} \quad \sum M_z = \circ \qquad (۷\text{ـ}۱)$$

البته اگر تیر خود متشکل از چند عضو باشد باید معادلات تعادل را برای هر عضو بصورت جداگانه نوشت. معمولاً برای محاسبات و رسم نمودار برش و لنگر خمشی، المان زیر را به عنوان المان پایه (المانی که دارای نیروی محوری و برش و لنگر خمشی مثبت است) درنظر می‌گیرند:



شکل (۷ـ۱)

روابط بین بارگسترده و برش و لنگر بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad \text{و} \quad \frac{dV(x)}{dx} = -w(x) \qquad (۷\text{ـ}۲)$$

قابل ذکر است که طبق قرارداد اگر جهت بارگسترده به‌طرف پایین باشد مثبت درنظر گرفته می‌شود.

در رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی توجه به موارد زیر کمک قابل توجهی به‌ما می‌کند:

۱ـ در قسمتی از سازه که باری وجود ندارد برش ثابت است و خطی موازی با محور تیر می‌باشد و در آن قسمت از سازه لنگر خمشی بصورت خطی تغییر می‌کند.

۲ـ در قسمتی از سازه که بارگسترده و یکنواخت وجود دارد برش بصورت خطی تغییر می‌کند و شیب ثابتی دارد و در آن قسمت از سازه لنگر خمشی بصورت سهمی (درجه ۲) تغییر می‌کند.

فصل ۸

خیز و شیب تیرها

برای محاسبه تغییرمکان و شیب در یک سازه روشهای متفاوتی وجود دارد که از جمله آنها می‌توان به روشهای کار مجازی، قضایای لنگر سطح، قضایای کاستیگلیانو، انتگرال‌گیری، تیر مزدوج و تغییر شکل سازگار اشاره کرد. در این فصل می‌خواهیم با استفاده از روابط متداول تغییرمکان و شیب تیرها با روش تغییر شکل سازگار، سازه‌ها را تحلیل کنیم و تعدادی از تستهای این فصل نیز به استفاده از جمع آثار مربوط است.

روش تغییر شکل سازگار: هر سازهٔ نامعینی را می‌توان با حذف قیود اضافی موسوم به نیروها یا لنگرهای زاید، یعنی آن تعداد مؤلفه‌های نیرو یا لنگر که مازاد بر حداقل تعداد لازم برای تعادل ایستایی سازه می‌باشد، به یک سازهٔ معین و پایدار تبدیل نمود. سازه معین و پایداری که پس از برداشتن قیود اضافی بدست می‌آید، سازه اولیه نامیده می‌شود. در این صورت، سازهٔ اصلی معادل خواهد بود با سازهٔ اولیه که تحت اثر مجموعه بارهای اصلی و نیروها یا لنگرهای زاید مجهول قرارگرفته است. پس از آن باید معادلات یکسان بودن شرایط هندسی در سازه اولیه و سازه حاصل را در نقطه اثر نیروها یا لنگرهای زاید نوشت. این معادلات، معادلات سازگاری نام دارند. می‌توان به همان تعداد نیروها یا لنگرهای زائد مجهول، معادله سازگاری بدست آورد و به این ترتیب نیروها یا لنگرهای زاید را با حل دستگاه معادلات چند مجهولی بدست آمده تعیین نمود. این روش که به روش تغییر شکل سازگار موسوم است می‌تواند برای تحلیل هر نوع سازه‌ای بکار رود، چه آن سازه تحت اثر بارگذاری و یا نشست تکیه‌گاه‌ها تحلیل شود و چه تحت اثر تغییر درجهٔ حرارت. تنها یک محدودیت در کاربرد این روش وجود دارد و آن محدودیت این است که اصل جمع آثار بایستی برقرار باشد که این مسأله مستلزم خطی بودن نمودار تنش ـ کرنش مصالح سازه است. در این صورت معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر، خطی است و براحتی ثابت می‌شود که برای محاسبه شیب و خیز تیرها جمع آثار برقرار است.

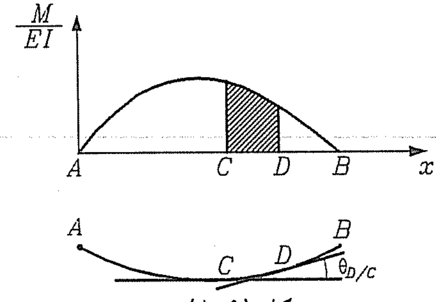
فصل ۹

لنگر سطح

در یک تیر که در معرض بارگذاری دلخواه قرار دارد، اگر نمودار تغییرات لنگر خمشی را بر صلبیت خمشی تیر تقسیم کنیم نمودار بار الاستیک تیر $\left(\dfrac{M}{EI}\right)$ بدست می‌آید که از آن می‌توان با استفاده از قضایای اول و دوم لنگر سطح برای تعیین شیب و خیز تیر استفاده کرد:

۱ـ **قضیه اول لنگر سطح:** اختلاف زاویه بین مماسهای رسم شده بر منحنی تغییر شکل سازه در دو نقطه C و D برابر است با سطح زیر منحنی $\dfrac{M}{EI}$ در فاصلهٔ نقاط C تا D:

$$\theta_{D/C} = \theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx \qquad (۱ـ۹)$$



شکل (۹ـ۱)

علامت زاویه $\theta_{D/C}$ و سطح زیر نمودار $\dfrac{M}{EI}$ یکی است. به عبارت دیگر سطح مثبت (یعنی سطحی که بالای محور xها واقع شده باشد) با چرخش پادساعتگرد مماس بر منحنی خیز متناظر است و هرگاه از نقطه C به طرف D حرکت کنیم، سطح منفی با چرخش ساعتگرد متناظر است. در مواردی که سازه دارای تکیه‌گاه گیردار باشد و یا به‌علت تقارن سازه و بارگذاری، خیز در وسط تیر ماکزیمم باشد براحتی می‌توان با استفاده از قضیه اول لنگر سطح برای تعیین شیب در هر نقطه‌ای از سازه استفاده کرد، چون شیب در محل تکیه‌گاه گیردار و یا نقطه نظیر خیز ماکزیمم مقداری معلوم و برابر صفر است.

۲ـ **قضیه دوم لنگر سطح:** انحراف مماسی C نسبت به D $\left(t_{C/D}\right)$ با لنگر اول سطح زیر نمودار

فصل ۱۰

مدلسازی بافنر

۱.۱۰ فنرهای سری و موازی

از آنجا که استفاده از ایده فنرها در حل بعضی مسائل روش کوتاه و مؤثری است لذا این بخش بطور کامل به آن اختصاص داده شده‌است. برای استفاده از این روش حفظ کردن بعضی فرمولها لازم می‌باشد که در ادامه آورده شده‌است. فنرها می‌توانند به دو صورت مهم با یکدیگر ترکیب شوند:

۱ـ فنرهای سری: در فنرهای سری نیروی همه فنرها برابر است با نیروی وارده و تغییر طول مجموعه فنرها برابر است با مجموع تغییر طولهای فنرها:

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_n = P \rightarrow K_1\Delta_1 = K_2\Delta_2 = \cdots = K_n\Delta_n = P$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = \frac{P}{K_1} + \frac{P}{K_2} + \cdots + \frac{P}{K_n}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta}{P} = \frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \cdots + \frac{1}{K_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_i} \tag{10-1}$$

در رابطهٔ فوق K سختی فنر معادل این فنرهای سری است که از سختی تک‌تک فنرها کمتر است.

فنرهای سری

۲ـ فنرهای موازی: در فنرهای موازی تغییر طول فنرها برابر است و نیروی وارده برابر است با مجموع نیروهای فنرها:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = \Delta \quad ، \quad P = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

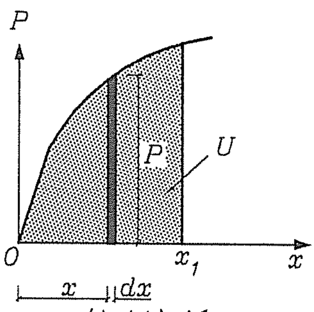
فصل ۱۱

روشهای انرژی

۱.۱۱ انرژی کرنشی

فرض می‌کنیم نیروی محوری P بر میله‌ای وارد شود. با رسم منحنی تغییرات مقدار بار برحسب تغییر شکل، نموداری مشابه شکل زیر برای بار ـ تغییر شکل بدست می‌آید که مشخصه میله است و کل کار انجام شده بوسیلهٔ بار (که همان انرژی کرنشی میله است) هنگامی که میله به اندازه $x_۱$ تغییر شکل می‌دهد برابر مساحت زیر این نمودار است:

$$U = \int_۰^{x_۱} P dx \qquad (۱\_۱۱)$$



شکل (۱۱ـ۱)

در حالت تغییر شکل کشسان و خطی، قسمتی از نمودار بار ـ تغییر شکل را می‌توان با خط راستی به معادلهٔ $P = Kx$ نشان داد و انرژی تغییر شکل برابر است با:

$$U = \int_۰^{x_۱} P dx = \int_۰^{x_۱} Kx dx = \frac{۱}{۲} K x_۱^۲ = \frac{۱}{۲} P_۱ x_۱ \qquad (۲\_۱۱)$$

فصل ۱۲

کمانش

۱.۱۲ پایداری سازه‌ها

برای اعضای تحت اثر بار فشاری (ستونها) باری به‌نام بار بحرانی وجود دارد که آنرا با P_{cr} نشان می‌دهیم. اگر نیروی عضو را با P نشان دهیم در حالتی‌که $P < P_{cr}$ باشد تعادل عضو پایدار است و اگر نیرویی به عضو وارد کنیم و تغییرمکانی ایجاد شود با برداشتن نیروی عامل تغییرمکان، عضو دوباره به محل اولیه خود برمی‌گردد. در حالتیکه $P > P_{cr}$ باشد تعادل ناپایدار است و اگر کوچکترین نیرویی به عضو وارد کنیم تغییر شکلهای بسیار بزرگ و بدون بازگشت از خود نشان می‌دهد. در حالتیکه $P = P_{cr}$ باشد تعادل عضو خنثی است و این بدان معناست که اگر تغییرمکانی به عضو اعمال کنیم تغییرمکان سازه به همان صورت باقی می‌ماند و حتی اگر نیروی عامل تغییرمکان را برداریم، تغییری در تغییرمکان سازه دیده نمی‌شود.

۲.۱۲ بار بحرانی

بار بحرانی ستونهای الاستیک توسط رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(Kl)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} \qquad (۱\_۱۲)$$

در رابطه فوق K ضریب طول مؤثر کمانش و l_e طول مؤثر کمانش نامیده می‌شود و همانطوریکه دیده می‌شود از ضرب ضریب طول مؤثر کمانش در طول ستون می‌توان طول مؤثر کمانش ستون را محاسبه کرد. طول مؤثر کمانش طولی از ستون کمانش یافته است که شکل کمانشی آن کاملاً مشابه ستون اولر (ستون دوسر مفصل حالت a شکل ۱۲_۱) باشد و این طول برابر است با فاصله بین نزدیکترین نقاطی که لنگر